33 1. $f(t)=2t-\frac{1}{t}$ avec $I=]-\infty;0[$

2. $f(x)=5\sqrt{x}-3x+2$ avec $I=]0;+\infty[$

3. $f(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{8x^4}$ avec $I=]0;+\infty[$

4. $f(t)=\frac{2t^3-4t-3}{2t^2}$ avec $I=]-\infty;0[$

1) f est dér sur I ĉ somme de fcs dér.

$$f'(t)=2\times 1-\left(-\frac{1}{t^2}\right)=2+\frac{1}{t^2}$$

2) f est dér sur I ĉ somme de fcs dér

$$f'(x)=5\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-3\times 1+0$$

$$=\frac{5}{2\sqrt{x}}-3$$

4) 2e méthode : $f(t)=\frac{2t^3}{2t^2}-\frac{4t}{2t^2}-\frac{3}{2t^2}$

$$=t-2\times\frac{1}{t}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{t^2}$$

f dér sur I ĉ somme de fcs dér

$$f'(t)=1-2\times\left(-\frac{1}{t^2}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{-2}{t^3}\right)$$

$$=1+\frac{2}{t^2}+\frac{3}{t^3}=\frac{t^3+2t+3}{t^3}$$

3) f est dér sur I ĉ somme de fcs dér.

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{8}\times\frac{1}{x^4}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\times 4x^3+\frac{1}{8}\times\left(\frac{-4}{x^5}\right)$$

$$f'(x)=2x^3-\frac{1}{2x^5}$$

4) $f(t)=\frac{2t^3-4t-3}{2t^2}$

1ère méthode : f dér ĉ qt de fcs dér.

$u(t)=2t^3-4t-3$ $\quad u'(t)=6t^2-4$

$v(t)=2t^2$ $\quad v'(t)=4t$

$$f'(t)=\frac{(6t^2-4)\times(2t^2)-(2t^3-4t-3)\times 4t}{(2t^2)^2}$$

$$=\frac{12t^4-8t^2-8t^4+16t^2+12t}{4t^4}$$

$$=\frac{4t^4+8t^2+12t}{4t^4}=\frac{4t(t^3+2t+3)}{4t^4}$$

$$=\frac{t^3+2t+3}{t^3}$$

Pour les exercices 38 à 41, déterminer, pour chacune des fonctions f, l'expression de sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I indiqué.

38 **1.** $f(x)=(x^2+2)\sqrt{x}$ avec $I=]0;+\infty[$.

2. $f(t)=\dfrac{1}{2t^2+4}$ avec $I=\mathbb{R}$.

3. $f(x)=\dfrac{4}{2x^3-x^2}$ avec $I=]1;+\infty[$.

4. $f(x)=\dfrac{4x-1}{3x^2+2x+1}$ avec $I=[0;+\infty[$.

$(uv)'=u'v+uv'$

1) f dér sur I ĉ somme de fcs dér.

$u(x)=x^2+2$ $\quad u'(x)=2x$

$v(x)=\sqrt{x}$ $\quad v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2+2)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

4) $f(x)$ existe ssi $3x^2+2x+1\neq 0$.

$\Delta=4-12=-8<0$. $D_f=\mathbb{R}$.

f est dér sur I ĉ qt de fcs dér.

$u(x)=4x-1$ $\quad u'(x)=4$

$v(x)=3x^2+2x+1$ $\quad v'(x)=6x+2$.

$f'(x)=\dfrac{4(3x^2+2x+1)-(4x-1)(6x+2)}{(3x^2+2x+1)^2}$

2) f dér sur I ĉ inverse de fcs dér

$\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^2}$

$u(t)=2t^2+4$ $\quad u'(t)=4t$.

$f'(t)=\dfrac{-4t}{(2t^2+4)^2}$

3) $f(x)=\dfrac{4}{2x^3-x^2}=4\times\dfrac{1}{2x^3-x^2}$

f existe ssi $2x^3-x^2\neq 0$

ssi $x^2(2x-1)\neq 0$ $D_f=\mathbb{R}-\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$

$0\notin I$, $\frac{1}{2}\notin I$

de f dér sur I ĉ inverse de fcs dér

$u(x)=2x^3-x^2$ $\quad u'(x)=6x^2-2x$

$f'(x)=4\times\dfrac{-(6x^2-2x)}{(2x^3-x^2)^2}$

39 **1.** $f(x)=2x^3\sqrt{x}$ avec $I=]0;+\infty[$.

2. $f(x)=(x-1)(x^2+3x-1)$ avec $I=\mathbb{R}$.

3. $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-3}$ avec $I=]-\infty;3[$.

4. $f(t)=\dfrac{3t^2-1}{\sqrt{t}}$ avec $I=]0;+\infty[$.

1) f est dér sur I ĉ pdt de fcs dér

$u(x)=2x^3$ $\quad u'(x)=6x^2$

$v(x)=\sqrt{x}$ $\quad v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=(6x^2)(\sqrt{x})+(2x^3)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2) f dér sur I ĉ pdt de fcs dér

$u(x)=x-1$ $\quad u'(x)=1$

$v(x)=x^2+3x-1$ $\quad v'(x)=2x+3$.

$f'(x)=1(x^2+3x-1)+(x-1)(2x+3)$

3) f est dér sur I ĉ qt de fcs dér.

$u(x)=2x+3$ $\quad u'(x)=2$

$v(x)=x-3$ $\quad v'(x)=1$

$f'(x)=\dfrac{2(x-3)-(2x+3)\times 1}{(x-3)^2}$.

4) $f(t)=\dfrac{3t^2-1}{\sqrt{t}}$

f dér sur I ĉ qt de fcs dér.

$u(t)=3t^2-1$ $\quad u'(t)=6t$

$v(t)=\sqrt{t}$ $\quad v'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

$f'(t)=\dfrac{6t\sqrt{t}-(3t^2-1)\times\frac{1}{2\sqrt{t}}}{(\sqrt{t})^2}$

Cours : Ch 8 (suite et fin).

II 2) Autres formules

Pté : St u une fct déf et dérivable sur un intervalle I telle que $u>0$.
Alors la fct $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

exemple : $f(x)=\sqrt{3-2x}$

f est dér ssi $3-2x>0$
ssi $-2x>-3$
ssi $x<\frac{3}{2}$

f est dér sur I comme composée de fct dérivables

$I=]-\infty;\frac{3}{2}[$

$u(x)=3-2x$
$u'(x)=-2$.

$$f'(x)=\frac{-2}{2\sqrt{3-2x}}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{3-2x}}.$$

Pté : St u une fct déf et dér sur un intervalle I. St $n\in\mathbb{N}$.
Alors la fct u^n est dér sur I et

$$u^n = n\,u'\,u^{n-1}$$

exple : $f(x)=(3x+4)^7$
f dér sur $\mathbb{R}$ ĉ composée de fct dér
$f'(x)=7\times 3\times(3x+4)^6$.

III Etude des variations d'1 fct

1) Variat° d'1 fct.

Thm : St I un intervalle sur lequel f est définie et dérivable.
* Si pour tout x de I, $f'(x)\geqslant 0$, alors la fct f est croissante sur I
* Si pr tt x de I, $f'(x)\leqslant 0$ alors la fct f est décroissante sur I.

Rq : Si $f'(x)>0$ alors f strict. croissante
$f'(x)<0$ " " décroissante.

Tableau de variation.

x				
Signe de $f'(x)$				
Variations de f				

2) Extremum d'1 fct.

Thm: St f une fct déf et dér sur I, f admet en x_0 un extremum local ssi f' s'annule et change de signe en x_0

3) Exemple:

St f la fct déf sur $\mathbb{R}$ par

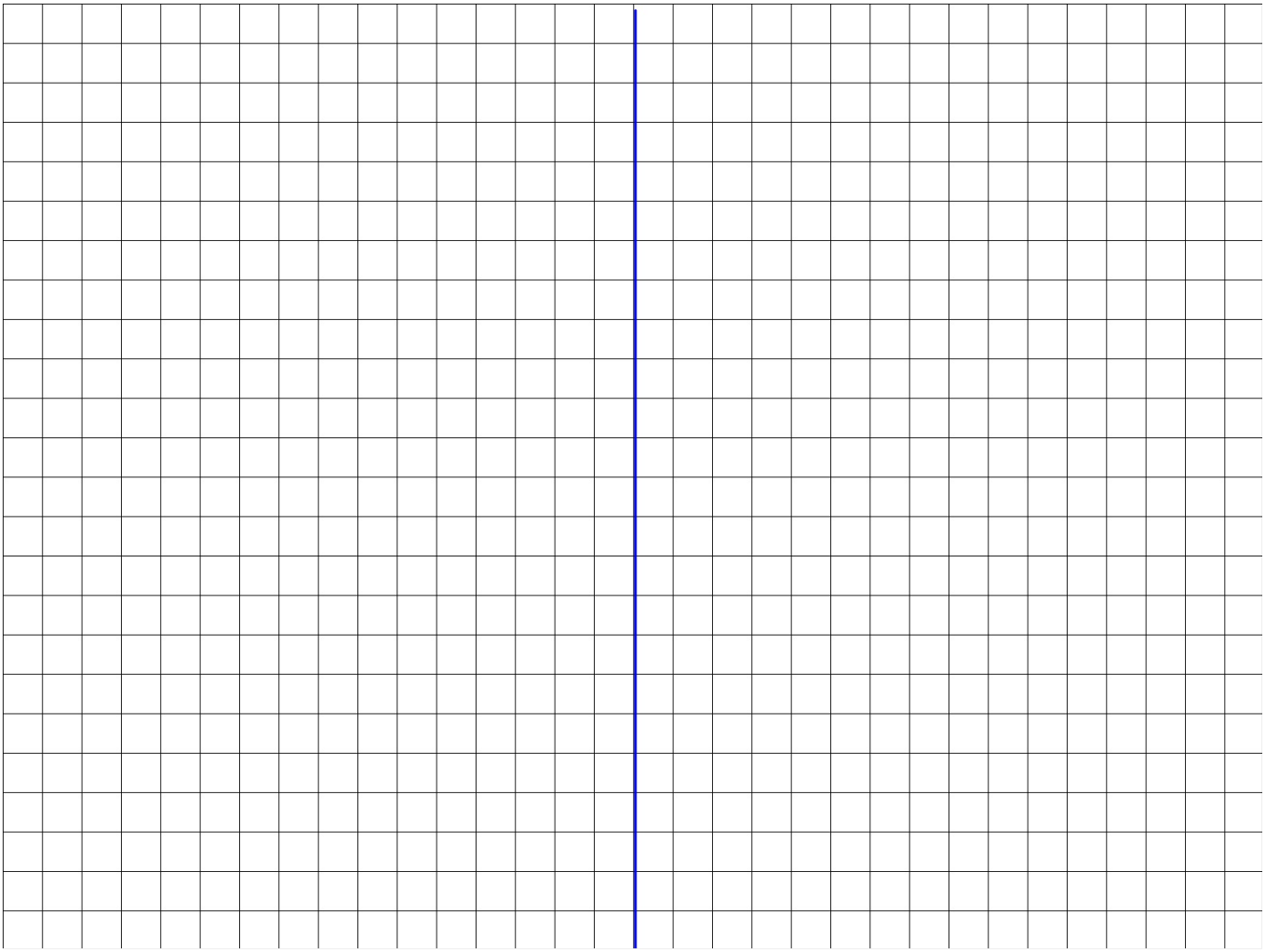
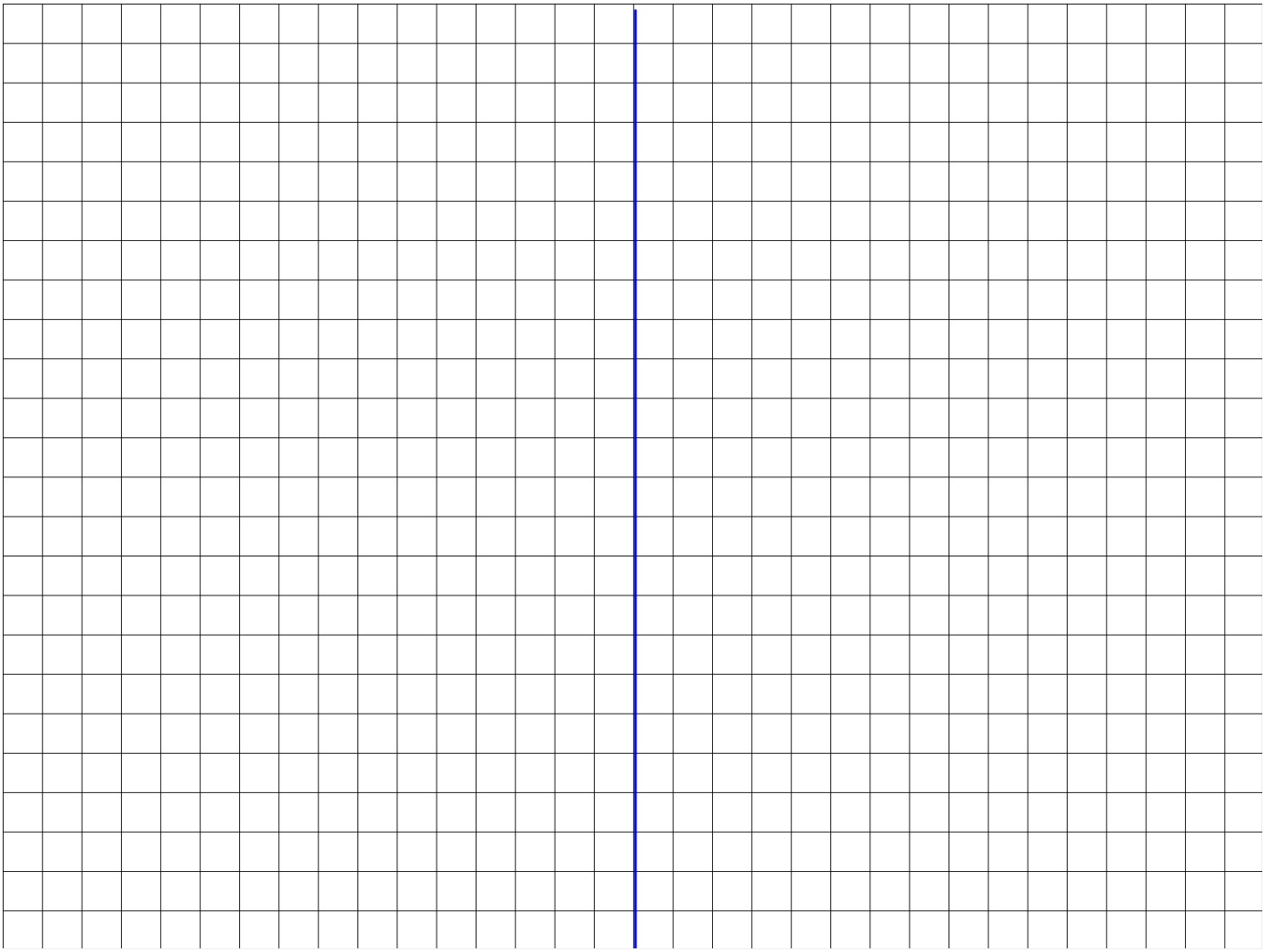
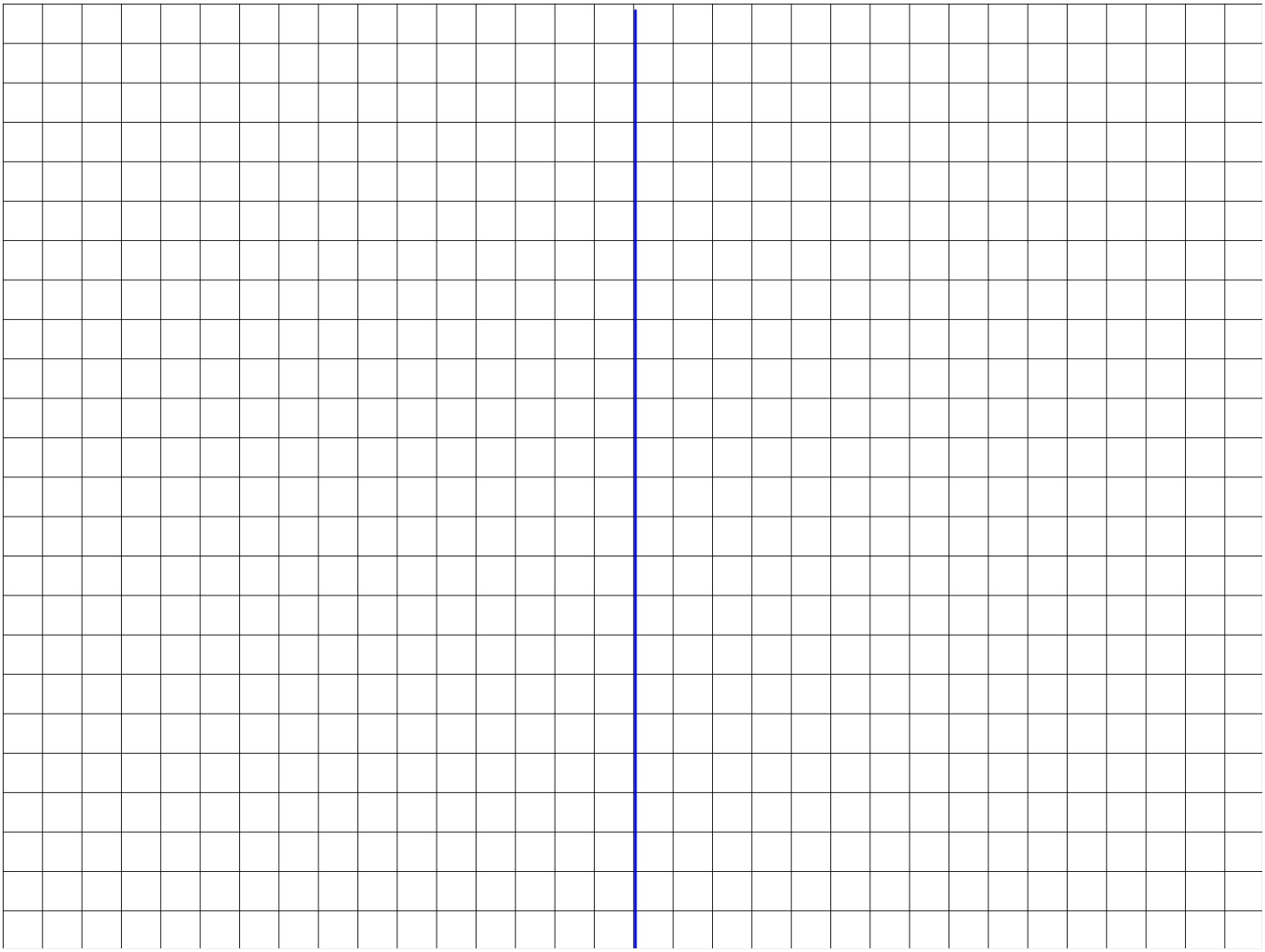
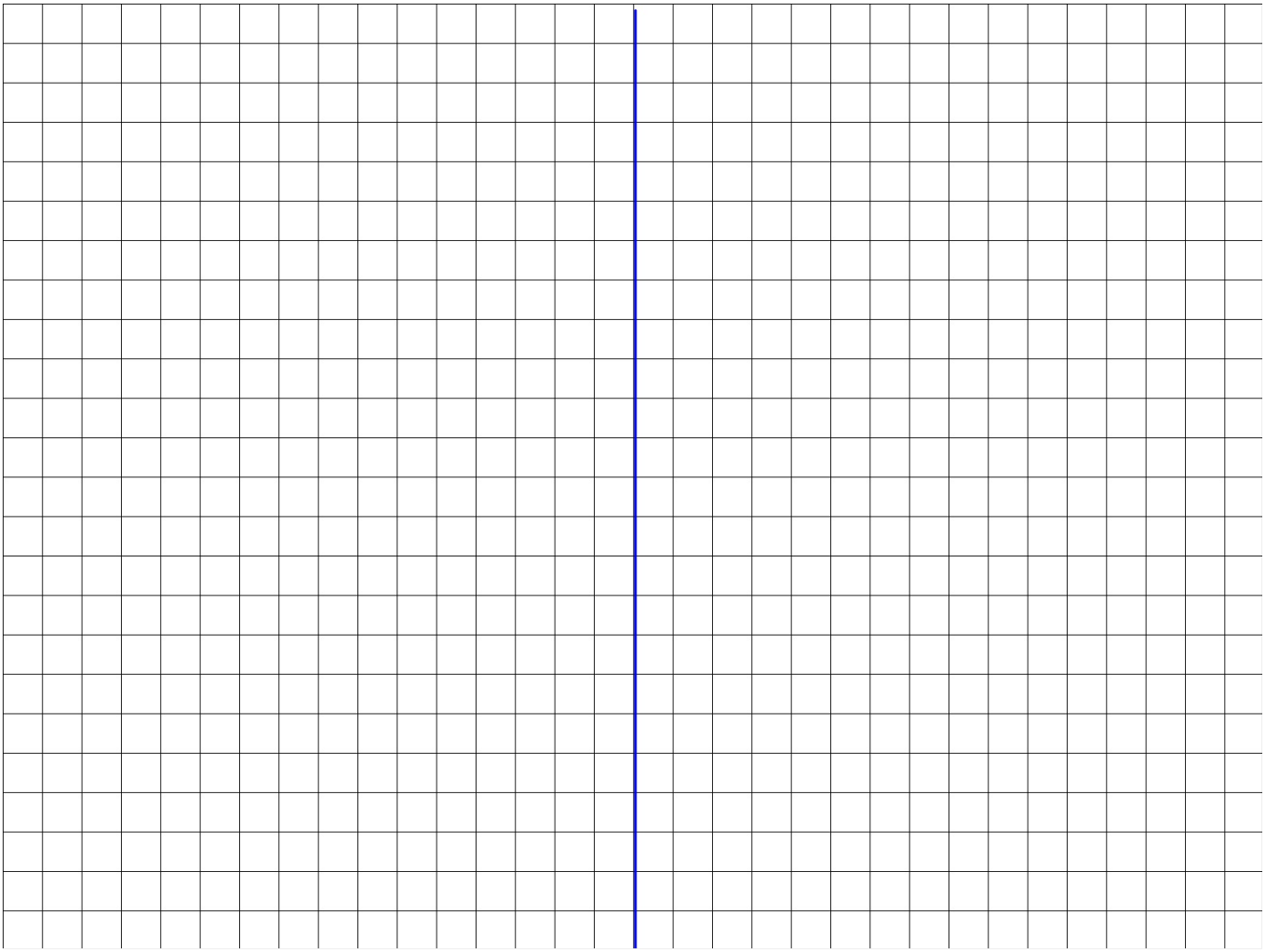
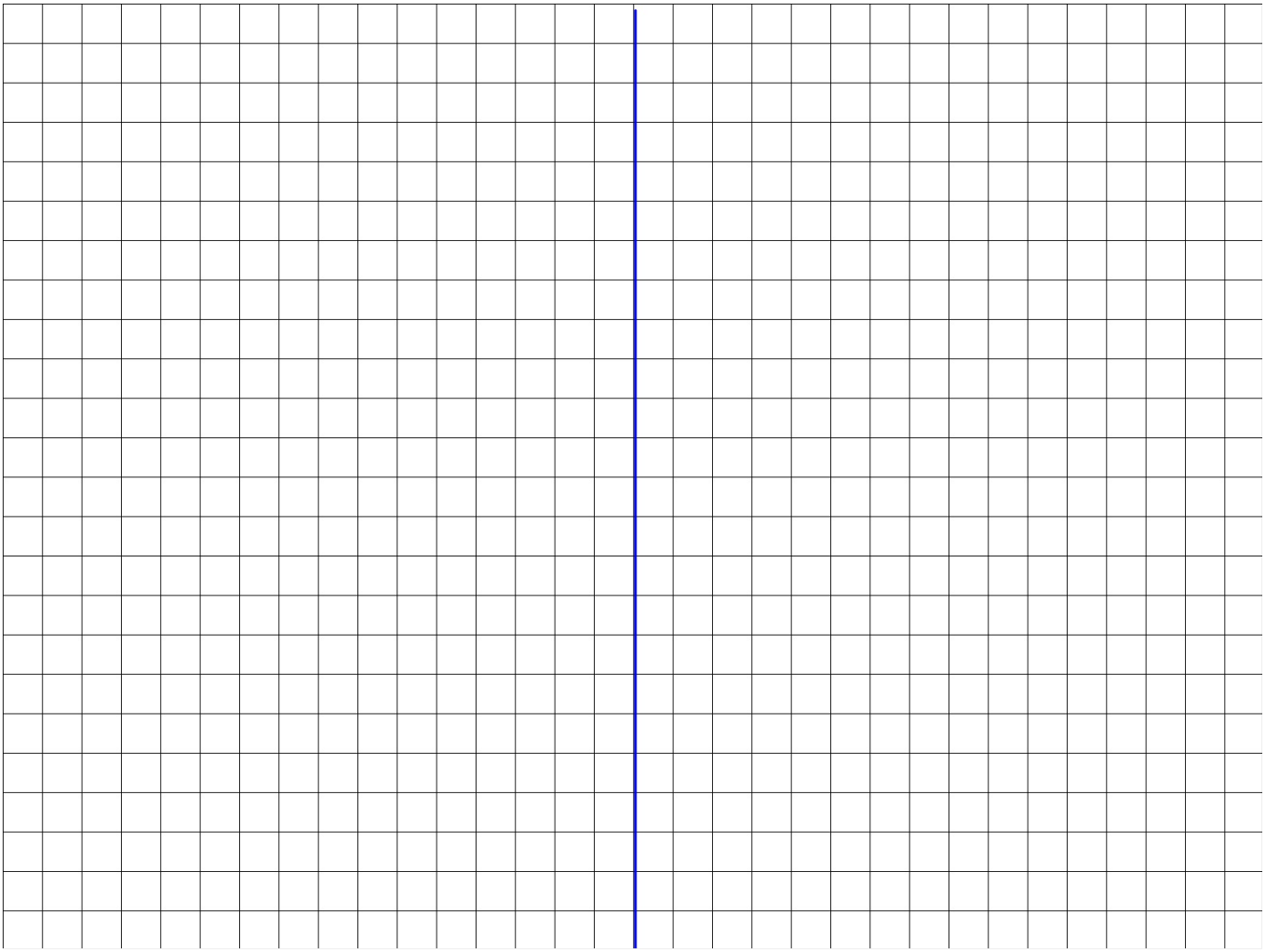
$$f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5.$$

Etudier les variations.

A savoir
1. Déterminer $f'(x)$
2. Déterminer son signe.
3. Tableau de variations.

1. f dér sur $\mathbb{R}$ ⁊ somme de fct dér
$$f'(x) = 3x^2 + \frac{9}{2} \times 2x - 12$$
$$= 3x^2 + 9x - 12.$$

2. $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225.$
$$x_1 = \frac{-9-15}{6} = \frac{-24}{6} = -4.$$
$$x_2 = \frac{-9+15}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

3.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variat de f		↗	61	↘	$-\frac{3}{2}$	↗